Механика II

Коси хитац у безваздушном простору

Коси хитац је кретање под дејством силе Земљине теже почетном брзином v_0 која има правац који са хоризонталних правцем заклапа угао α (елевациони угао).

Ово кретање се врши у безваздушном просроту па се не узимају у обзир отпорне силе. Криволинијска путања косог хица може се сместити у једну раван, па је коси хитац кретање у равни. Једначине кретања материјалне тачке су:

$$\left.\begin{aligned} X &= m a_x \\ Y &= m a_y \end{aligned}\right\} \tag{2.2.47}$$

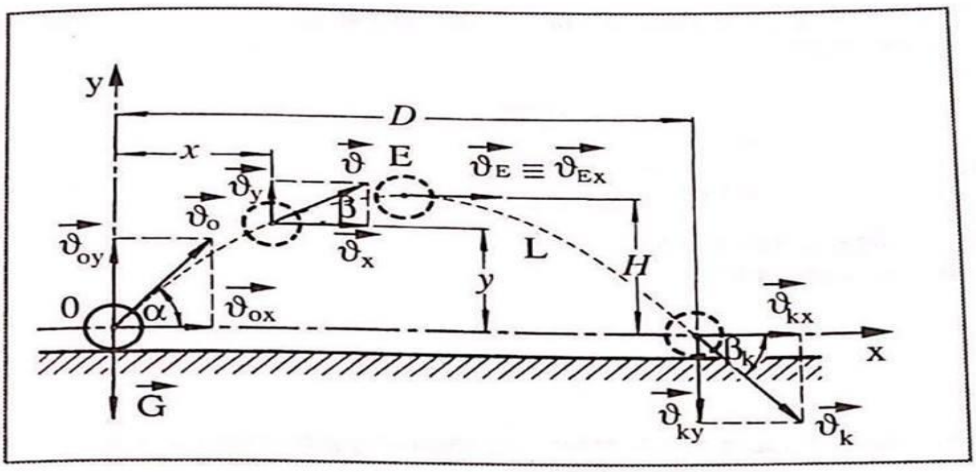
Једначина $Z = 0$ се подразумева. У правцу x осе не дејствују силе, а у правцу y осе дејствује тежина материјалне тачке G, па је:

$$\left.\begin{aligned} X &= 0 = m a_x \\ Y &= -G = -mg = m a_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned}\right\} \tag{2.2.48}$$

Посматрањем компонената убрзања и почетних услова може се закључити:

1) у правцу координатне осе x тачка се креће једнолико праволинијски са хоризонталном компонентом почетне брзине (сл. 128.):

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \tag{2.2.49}$$



Слика 128. – Коси хитац

2) у правцу координатне осе y тачка се креће једнакоуспорено праволинијски успорењем $-a_y = g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ и вертикалном компонентом почетне брзине:

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha; \tag{2.2.50}$$

односно у правцу координатне осе y тачка се креће по законима вертикалног хица навише почетном брзином v_{0y} (сл. 128).

Слагањем једноликог праволинијског кретања брзином v_{0x} у правцу x осе и једнакоуспореног праволинијског кретања почетном брзином v_{0y} и успорењем $-g$ у правцу y осе добија се као резултујуће кретање коси хитац у безваздушном простору.

На основу карактеристика кретања у правцу координатних оса, добијају се једначине кретања материјалне тачке у облику:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_{0x}\,t = v_0 t\cos\alpha \\ y &= v_{0y}\,t - \frac{1}{2}g t^2 = v_0\, t\sin\alpha - \frac{1}{2}g t^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.2.51}$$

Елиминацијом (одстрањивањем) времена из једначина (2.2.51) добија се једначина путање косог хица:

$$y = v_0 \frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2,$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2. \tag{2.2.52}$$

Једначина (2.2.52) је аналитички израз квадратне параболе која има вертикалну осу, а теме јој се налази изван координатног почетка (у тачки E).

Тренутна брзина косог хица добија се слагањем хоризонталне и вертикалне компоненте брзине:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha = \text{const.}, \\ v_y &= v_0 \sin\alpha - g\,t, \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g\,t \sin\alpha + g^2 t^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.53}$$

Време достизања темена параболе t_E добија се из услова да је у темену вертикална компонента брзине једнака нули:

$$v_{Ey} = 0 = v_0 \sin\alpha - g\,t_E,$$

$$t_E = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{2.2.54}$$

Ордината темена параболе H добија се када се у једначину (2.2.51) у y замени време t_E.

$$y = H = v_0\, t_E \sin\alpha - 1/2\, g t_E^{\,2},$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{2.2.55}$$

У темену параболе E тачка има само хоризонталну брзину па се од тог положаја креће по законима хоризонталног хица. Време падања хоризонталног хица је:

$$t_K = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Заменом у t_K једначине (2.2.55) добија се време падања које је једнако времену t_E, па је укупно време кретања при косом хицу:

$$T = t_E + t_K = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{2.2.56}$$

Домет при косом хицу добија се када се у једначину (2.2.51) у x замени укупно време кретања T:

$$x = D = v_0\, T \cos\alpha,$$

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{2.2.57}$$

Правац брзине v са хоризонталом заклапа угао β који се одређује преко тангенса:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - g\,t}{v_0 \cos\alpha}. \tag{2.2.58}$$

При удару у Земљу брзина v_K једнака је почетној брзини v_0 а упадни угао β_K једнак је елевационом углу α.

$$v_K = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gT\sin\alpha + g^2T^2} = v_0$$

(заменом $T = 2\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ може се доказати једнакост)

$$\mathrm{tg}\,\beta_K = \frac{v_0\sin\alpha - gT}{v_0\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Највећи домет постиже се са елевационим углом $\alpha = 45°$, а највећа висина H постиже се са елевационим углом $\alpha = 90°$.

$$\left.\begin{aligned} D_{\text{max.}} &= \frac{v_0^2\sin(2\cdot 45°)}{g} = \frac{v_0^2}{g} \\ H_{\text{max.}} &= \frac{v_0^2\sin^2 90°}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.59}$$

Једнаки домети могу се постићи са два различита елевациона угла ако се ти углови допуњују до 90°, тј.:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90°. \tag{2.2.60}$$

44. пример

Материјална тачка је избачена под елевационим углом од 30° почетном брзином 100 m/s. Одредити: укупно време кретања тачке, домет, највећу достигнуту висину и угао под којим се може достићи исти домет.

Решење

Укупно време кретања T је:

$$T = 2\frac{v_0\sin\alpha}{g} = 2\cdot\frac{100\cdot\sin 30°}{9{,}81} = 10{,}19\,\text{s}.$$

Домет D материјалне тачке је:

$$D = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{100^2\sin(2\cdot 30°)}{9{,}81} = 882{,}80\,\text{m}.$$

Највећа достигнута висина H је:

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{100^2(\sin 30°)^2}{2\cdot 9{,}81} = 127{,}42\,\text{m}.$$

Угао под којим се може достићи исти домет је:

$$\alpha_2 = 90° - \alpha = 90° - 30° = 60°.$$